معادلة التوصيل الحراري من نمط المكافئة وغير المتجانسة
الفصل الثالث

①

الأربعاء 2018/5/2 م — المحاضرة الثامنة — 8^{00} م

تمرين ص 300
سوف نناقش مسألة القضيب المحدود $(l, 0)$ الذي طرفاه يبقيان بدرجتي حرارة ثابتتين u_0, u_1 عند الطرفين $(0, l)$, u_1, u_0
أي حل المعادلة

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{---} (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{---} (2), \quad u(0,t) = u_0, \quad u(l,t) = u_1 \quad \text{---} (3)$$

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$$

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$$

$$U(x,t) = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_2)$$

$$u(x,t) = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_2) + v(x,t) \quad \text{---} (4)$$

نشتق مرة واحدة بالنسبة لـ t
ومرتين بالنسبة لـ x

$$u_t = v_t, \quad u_x = \frac{1}{l}(u_1 - u_0) + v_x, \quad u_{xx} = v_{xx}$$

نبدل بالمعادلة فنحصل على

$$v_t = a^2 v_{xx} \quad \text{---} (5)$$

والدالة الجديدة v هي التي تحقق الشرط الابتدائي.
من (2 و 4)

$$\varphi(x) = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0) + v(x,0) \Rightarrow$$

$$v(x,0) = \varphi(x) - u_0 - \frac{x}{l}(u_1 - u_0) = \bar{\varphi}(x) \quad \text{---} (6)$$

(2)

والمعادلة مع تحقق الشروط الحدية الصفرية

$v(0,t)=0 \quad , \quad v(l,t)=0$ ---- (7)

من (5) ، (6) ، (7)

أي المعادلة متجانسة وشروط حدية صفرية

فالحل يعطى بالشكل:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{2}\right)^2 t}\, C_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l \bar{\varphi}(\xi)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}(\xi)\, d\xi$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l \left[\varphi(\xi)-u_0-\frac{\xi}{l}(u_1-u_0)\right]\cdot \sin\frac{n\pi}{l}\xi\, d\xi$$

* دراسة التوصيل الحراري في مستقيم لانهائي (مسألة كوشي)

1] معادلة التوصيل الحراري المتجانسة:

نص المسألة:

أوجد الحل للمعادلة $u(x,t)$, $-\infty<x<+\infty$
$t\geq 0$

والذي يحقق معادلة التوصيل الحراري

$u_t=a^2u_{xx}$, $-\infty<x<+\infty$, $t>0$ --- (1)

والشرط الابتدائي:

$u(x,0)=\varphi(x)$, $-\infty<x<+\infty$ --- (2)

الحل:
سنفرض أنّ حل المعادلة بالتفاضل ـ الحلول الناتجة
على الشكل التالي:

$u(x,t) = X(x).T(t)$ ---- (3)

نشتق العلاقة (3) مرة بالنسبة لـ t
ومرتين بالنسبة لـ x
ونعوض بـ (1) فنحصل على:

$u_t = X.T'$, $u_x = X'.T$, $u_{xx} = X''.T$

$X.T' = a^2 X''.T$ نقسم على $X.a^2.T$ فنحصل:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}.\frac{T'}{T} = -\lambda^2$$

علماً أنّ λ^2 بارامتر الفصل
من العلاقة الأخيرة نحصل على المعادلتين

$X'' + \lambda^2.X = 0$ ---- (4)

$T' + a^2\lambda^2 T = 0$ ---- (5)

كل المعادلتين والعودة لـ (3) نعين الحلول الخاصة.
لحل المعادلة (4): نأخذ المعادلة المميزة:

(4):
$$\rho^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \rho^2 = \lambda^2.i^2 \Rightarrow \rho = \mp \lambda i$$

$X(x) = A.\cos\lambda(x) + \beta\sin\lambda(x)$

أو

$X_\lambda(x) = A_\lambda\cos(\lambda x) + \beta_\lambda\sin(\lambda x)$

و A, B ثوابت اختيارية.

(5): $\frac{dT}{T} = -a^2 \lambda^2 . dt$

$\ln \frac{T}{c} = -a^2 \lambda^2 t \Rightarrow T = c . e^{-a^2 \lambda^2 t}$ ← بأخذ $(c = 1)$

$\Rightarrow T_\lambda = e^{-a^2 \lambda^2 t}$

نبدل بالعلاقة (3) فنحصل على:

$$u_\lambda(x,t) = e^{-a^2 \lambda^2 t} . [A(\lambda) . \cos \lambda x + B(\lambda) . \sin \lambda x] \quad --(6)$$

علماً أن A , B توابع متعلقة بـ λ.

نكامل العلاقة 6 بالنسبة لـ λ لنحصل على الحل بالتعميم الخطي

فنحصل على:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} [A(\lambda) . \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] \, d\lambda \quad -(7)$$

وذلك بفرض أن التكامل متقارب.

وعلى اعتبار أن الحدود تحت إشارة التكامل (7) مرة واحدة بالنسبة لـ T ومرتين بالنسبة لـ x لتحقق المعادلة

التفاضلية المعطاة.

لنوجد $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ حيث العلاقة (7) تحقق الشرط الابتدائي

نعوض بالعلاقة (7) $t = 0$ ومن الاستفادة من الشرط (2)

فنحصل على:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin(\lambda x)] \, d\lambda \quad --(8)$$

بمقارنة التكامل في الطرف الأيمن لـ 8 مع تكامل فورييه للدالة $\varphi(x)$
نحصل على

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos(\lambda \xi)\, d\xi$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin(\lambda \xi)\, d\xi$$

نبدل $A(\lambda)$ ، $B(\lambda)$ بما يساويهما في العلاقة (7) ونغير ترتيب التكامل
نحصل على

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, d\xi \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cdot \cos\lambda(\xi - x)\, d\lambda \quad \text{---(9)}$$

لان الدالة زوجية اذا ابدلنا كل λ بـ $-\lambda$ تبقى كما هي

لحساب التكامل الداخلي نجري التحويل.

$$a\lambda\sqrt{t} = z \quad ; \quad \lambda(\xi - x) = \mu . z$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow z = 0$$
$$\lambda = \infty \Rightarrow z = \infty \quad , \quad d\lambda = \frac{dz}{a\sqrt{t}}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cdot \cos\lambda(\xi - x)\, d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_{0}^{\infty} e^{-z^2} \cos\mu z\, dz$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{t}} J(\mu)$$

علماً أن: $J(\mu)$

$$J(\mu) = \int_{0}^{\infty} e^{-z^2} \cos(\mu z) . dz \quad \text{---} \star$$

نفاضل المعادلة الأصلية بالنسبة لـ μ (نشتق بالنسبة لـ μ)

$$\Rightarrow J'(\mu) = \int_0^\infty -z e^{-z^2} \cdot \sin \mu z \cdot dz$$

سنكامل الطرف الثاني بالتجزئة

$$dv = -z \cdot e^{-z^2} \cdot dz$$

$$v = \frac{1}{2} e^{-z^2} \quad , \quad u = \sin \mu z \Rightarrow du = \mu \cos \mu z \, dz$$

$$\Rightarrow J'(\mu) = -z e^{-z^2} \sin \mu z \Big|_0^\infty - \frac{\mu}{2} \int_0^\infty e^{-z^2} \cos \mu z \cdot dz$$

(الحد الأول $= 0$)

$$J'(\mu) = -\frac{\mu}{2} J(\mu)$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة.

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{\mu}{2} d\mu \Rightarrow \ln \frac{J}{c} = -\frac{\mu^2}{4}$$

$$\Rightarrow J(\mu) = c \cdot e^{-\frac{\mu^2}{4}}$$

لتحديد الثابت ... من السابقة ★

$$J(0) = \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\mu = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} = c \cdot (1) \Rightarrow J(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{4}}$$

وبالتالي: التكامل الداخلي =

أوجد الحل العام للمعادلة ثم استنتج الحل الأساسي لمعادلة التوصيل الحراري

(7)

$$\frac{1}{a\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}$$

وبالتالي نحصل على الحل الأخير بالشكل:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \cdot \varphi(x) \cdot \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}$$

من [illegible] φ و a

والحل يمكن كتابته بالشكل الآتي:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t) \cdot \varphi(\xi)\, d\xi$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}$$

تسمى بالحل الأساسي لمعادلة التوصيل الحراري أو تسمى دالة المصدر النقطي.

ملاحظة ص 315

بدلنا بالمسبق الأصلي كل t بـ $t-t_0$

$t=0 \qquad t_0 = t$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-t_0)}} \varphi(\xi) \cdot \frac{d\xi}{2a\sqrt{t-t_0}}$$

المسألة الثانية :
معادلة التوصيل الحراري غير المتجانسة :
نص المسألة :
عين الدالة المحدودة $u(x,t)$ في المنطقة $t>0$, $-\infty < x < +\infty$
والتي تحقق معادلة التوصيل الحراري غير المتجانسة

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad ; \quad -\infty < x < +\infty \ , \ t>0 \quad (1)$$

والمحقق الشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad -\infty < x < +\infty \quad (2)$$

وحل هذه المسألة يعطى بالدستور الآتي :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} +$$

الحل العام للمتجانسة — حل خاص لغير المتجانسة

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi,\tau)\, d\tau \frac{d\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$$

انتشار الحرارة على مستقيم نصف لانهائي : نظريتين بسيطتين :

نظرية (1) النص :
اذا كانت الدالة $\varphi(\xi)$ محدودة ودالة فردية $\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$
عندئذ أثبت أن حل معادلة التوصيل الحراري المتجانسة يؤول الى
الصفر عندما $x=0$ أي أثبت أن : $u(0,t) = 0$

الحل :

تكامل دالة فردية ضمن مجال متناظر $\int_{-\infty}^{+\infty} = 0$

(٩)

لدينا حل المعادلة ... t ... ثابت موجبة نكتب

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}$$

$$u(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) \cdot \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}$$

بما أن الدالة المكاملة هي جداء دالتين إحداهما زوجية والأخرى فردية (فرضاً) والأخرى زوجية، فالناتج هو الدالة الفردية، والتكامل من $-\infty$ إلى $+\infty$ هو الصفر ←

$u(0,t) = 0$ وهو المطلوب

[3] المسألة الثانية

إذا كانت الدالة $\varphi(x)$ محدودة ودالة زوجية $\varphi(-x) = \varphi(x)$ أثبت أن مشتق الدالة $u(x,t)$ (التي هي عبارة عن حل معادلة التوصيل الحراري الخاصة بمسألة كوشي للسلك اللانهائي) تكون مساوية للصفر أي $x = 0$ ←

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$$

الحل:

إن حل معادلة التوصيل الحراري يعطى بالدستور التالي:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -2(\xi - x) \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}$$

$$\frac{\partial (0,t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{a\sqrt{t}}$$

بما أن الدالة المكاملة فردية وهي عبارة عن جداء دالتين زوجيتين x فردية وتكاملها من $-\infty$ إلى $+\infty$ ← تكاملها يساوي الصفر

$$\rightarrow \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi} \quad ; \quad \int_{0}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(١٥)

تمرين 359

أوجد حل المعادلة بمعادلة التوصيل الحراري الخطية والمحققة للشرط:

$$(1)\quad u_t = u_{xx}$$

$$(2)\quad u(x,0) = x \cdot e^{-x^2}$$

الحل

حل هذه المسألة يعطى بالصيغة الآتية.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\,\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}$$

$a = 1$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}}\, \xi \cdot e^{-\xi^2}\,\frac{d\xi}{2\sqrt{t}} \quad (3)$$

$$e^{-\xi^2} \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}} = ? \quad ; \quad -\xi^2 - \frac{(\xi - x)^2}{4t} = ?$$

$$-\xi^2 - \frac{(\xi - x)^2}{4t} = -\left[\frac{(\xi - x)^2 + 4t\xi^2}{4t}\right]$$

$$= -\left[\frac{\xi^2 - 2\xi x + x^2 + 4t\xi^2}{4t}\right] = -\left[\frac{(1+4t)\xi^2 - 2x\cdot\xi + x^2}{4t}\right]$$

$$= -\left[\frac{(1+4t)^2\xi^2 - 2x(1+4t)\cdot\xi + (1+4t)x^2}{4t(1+4t)}\right]$$

→ طبقنا طريقة الإكمال لمربع كامل [illegible]

$$= -\left[\frac{((1+4t)\xi - x)^2 - x^2 + (1+4t)\cdot x^2}{(1+4t)4t}\right]$$

$$= -\frac{((1+4t)\xi - x)^2}{4t(1+4t)} - \frac{x^2}{1+4t}$$

(١١)

7.00 من العلاقة (3) نأخذ الشكل :

8.00 $$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{1+4t}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \cdot e^{-\left[\frac{(1+4t)\xi - x}{4t(1+4t)}\right]^2} \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

9.00

10.00 $$\frac{(1+4t)\xi - x}{2\sqrt{t}\cdot\sqrt{1+4t}} = z \Rightarrow \xi = \frac{\mu z + x}{1+4t}$$

11.00 $$\frac{d\xi}{2\sqrt{\ }} = \frac{\sqrt{1+4t}}{1+4t}\, dz$$

12.00

13.00 $$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}} \cdot \frac{\sqrt{1+4t}}{(1+4t)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu z + x) e^{-z^2} dz$$

14.00 $$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}} \frac{\sqrt{1+4t}}{(1+4t)^2} \Big[\mu \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-z^2} dz}_{=0} + x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz}_{\sqrt{\pi}} \Big]$$

15.00

16.00 دالة فردية (حيث حدود التكامل تناظرية) ← تكاملها = 0
قيمة التكامل الثاني = $\sqrt{\pi}$

17.00

18.00 $$u(x,t) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{1+4t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4t}\,(1+4t)}$$

19.00 $$\Rightarrow u(x,t) = x \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{1+4t}}}{(1+4t)^{\frac{3}{2}}}$$

20.00 نعوض بالشرط الابتدائي $u(x,0)$ يجب أن يتحقق
ونلاحظ أنه محقق

الفصل الثالث - المسألة الحدية أو مسألة كوشي - معادلات المرتبة الثانية

(12)

33 بحوث الصفحة

* حل المعادلات التفاضلية الجزئية في الحالة العامة ذات المعاملات الثابتة تأخذ الشكل الآتي .

$$u_t = a^2 u_{xx} + b u_x + c u + f(x,t) \quad \text{—— (1)}$$

a^2 أمثال u_{xx} ، b هي أمثال u_x و c هي أمثال u

لحل المعادلة (مسألة كوشي أو مسألة حدية) نحول المعادلة الى معادلة التوصيل الحراري وذلك بإجراء التحويل الآتي :

$$u = e^{\left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)t - \frac{b}{2a^2}x} \cdot v(x,t) \quad \text{—— (2)}$$

نستقد ونعوض في المعادلة المعطاة : نحصل على المعادلة الحراري
نقف كتابة العبارة

معادلة التوصيل الحراري

$$\left[\, v_t = a^2 v_{xx} + e^{\left(\frac{b^2}{4a^2} - c\right)t + \frac{b}{2a^2}x} \cdot f(x,t) \,\right]$$

مثال 36

أوجد حل المعادلة ،

$$u_t = u_{xx} + 3t^2 \quad \text{—— (1)}$$

والمحقق للشرط الابتدائي

$$u(x,0) = \sin x \quad \text{—— (2)}$$

← مسألة كوشي ،

(13)

حل هذه المعادلة يعطى بالمستوي الأول.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) \, d\tau \frac{d\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4(t-\tau)}} \sin\xi \frac{d\xi}{2\sqrt{t}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4(t-\tau)}} \cdot 3\tau^2 \, d\tau \frac{d\xi}{2\sqrt{t-\tau}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_2$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}} \cdot \sin\xi \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{t}} = z \Rightarrow \frac{d\xi}{2\sqrt{t}} = dz$$

$$\Rightarrow \xi = \mu z + x \quad ; (\mu = 2\sqrt{t})$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \sin(\mu z + x) \, dz$$

$$I_1 = \cos x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \sin \mu z \, dz + \sin x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cdot \cos \mu z \, dz$$

(the first integral $= 0$)

$$\Rightarrow I_1 = 2 \sin x \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cdot \cos \mu z \, dz$$

نضع z ← نشتق عند μ

$$\Rightarrow J(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \mu z \, dz \quad , \quad J(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$J'(\mu) = \int_0^{\infty} \underbrace{- z \cdot e^{-z^2}}_{dv} \sin \mu z \, dz$$

$$v = \frac{1}{2} e^{-z^2} \quad ; \quad u = \sin \mu z$$

$$\Rightarrow J'(\mu) = \frac{1}{2} e^{-z^2} \sin \mu z \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-z^2} \cdot \mu \cdot \cos \mu z \, dz$$

(the boundary term $= 0$)

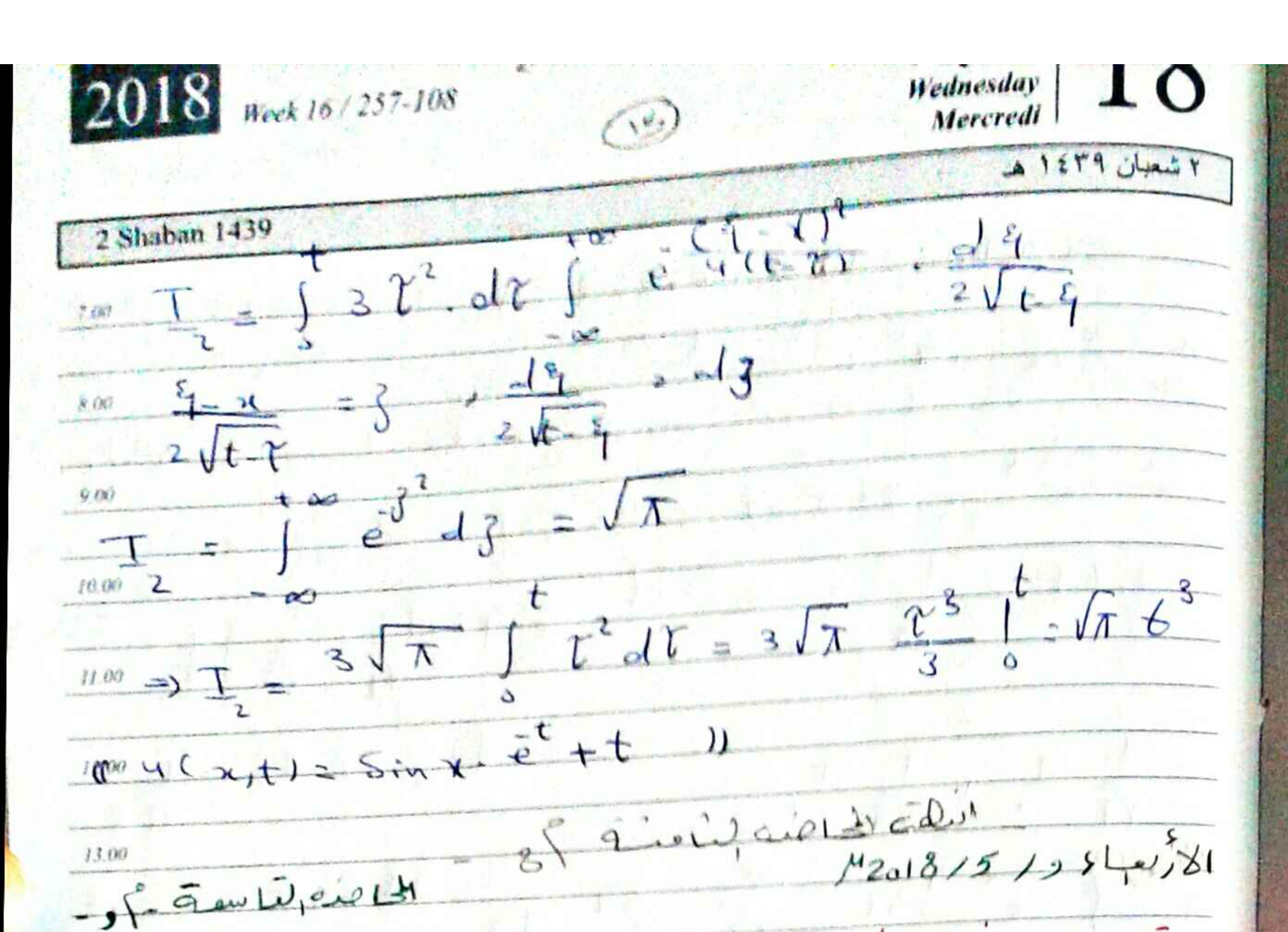
$$= -\frac{\mu}{2} \cdot J(\mu)$$

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{\mu}{2} d\mu \Rightarrow J = c \, e^{-\frac{\mu^2}{4}}$$

$$J(0) = c \cdot e^0 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$J(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\mu^2}{4}} \quad , \quad \mu = 2\sqrt{t}$$

$$I_1 = 2 \sin x \, \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t} \Rightarrow \left(I_1 = \sqrt{\pi} \sin x \, e^{-t} \right)$$



$$I_2 = \int_0^t 3\tau^2 \, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4(t-\tau)}} \cdot \frac{d\xi}{2\sqrt{t-\xi}}$$

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{t-\tau}} = z \quad , \quad \frac{d\xi}{2\sqrt{t-\xi}} = dz$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \, dz = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow I_2 = 3\sqrt{\pi} \int_0^t \tau^2 \, d\tau = 3\sqrt{\pi} \left. \frac{\tau^3}{3} \right|_0^t = \sqrt{\pi}\, t^3$$

$$u(x,t) = \sin x \cdot e^{-t} + t \quad //$$

انتهت المحاضرة الثامنة ٢م

الأربعاء ١٨ / ٥ / 2018م

المحاضرة التاسعة ...